1.04.2018

2017–2018 Bahar Dönemi Cebir II

Ara Sınav Cevap Anahtarı

1) a) R birimli bir Boole halkası olsun. O halde R değişmeli-dir ve $k(R)=2$ dir

$a,b \in R$ için

$$(a+b)ab = a^2b + bab \overset{a^2=a}{=} ab + bab \overset{\text{değişmeli}}{=} ab + b^2a \overset{b^2=b}{=} ab + ba \overset{\text{değişmeli}}{=} ab+ab \overset{+ \text{ tanımı}}{=} 2ab \overset{k(R)=2}{=} 0$$

10p

b) R birimli bir regüler halka olsun R'nin sıfırdan farklı keyfi bir elemanını alalım. $0 \neq a \in R$ için a sıfır bölen eleman olmasın

$a \in R$ ve R regüler ise $\exists b \in R$ için $a = aba \Rightarrow aba - a = 0$
$\Rightarrow a(ba-1) = 0$
$\Rightarrow ba - 1 = 0$
$\Rightarrow ba = 1$

5p

Benzer şekilde $a = aba \Rightarrow aba - a = 0$
$\Rightarrow (ab-1)a = 0$
$\Rightarrow ab - 1 = 0$
$\Rightarrow ab = 1$

5p

$ab = ba = 1$ öş $b \in R$ olduğundan a, birimseldir

2) a) $\mathbb{Z}$ halkasının Temel ideal bölgesi olduğunu göstermek için $\mathbb{Z}$'nin her idealinin temel ideal olduğunu göstermeliyiz. O halde I, $\mathbb{Z}$'nin keyfi bir ideali olsun

10p

$I = (0)$ ise açıktır

$I \neq (0)$ ise $\exists u \in I$ vardır $-u \in I$ olup u'yu pozitif alabiliriz. Pozitif tamsayıların iyi sıralı küme olduğunu biliyoruz. $EKE(I) = a$ olsun $a \in I$ ve $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a) = \mathbb{Z}a = \{ra \mid r \in \mathbb{Z}\}$ olup $(a) \subseteq I$ ...(1)

Şimdi de $b \in I$ olup b ve a'ya bölme algoritması uygulanırsa $b = qa + r$ öş $0 \leq r < a$ olup $r = \underset{\in I}{b} - \underset{\in I}{qa} \in I$ old $r < a$ olamaz $r = 0$
$\Rightarrow b = qa \Rightarrow b \in (a)$ olup $I \subseteq (a)$ ...(2) olup (1) ve (2) den $I = (a)$ yani $\mathbb{Z}$ Temel ideal bölgesidir

b) $f: R \to S$ örten homomorfizma olsun

$k: R/_{Çekf} \to S$ için k'nın iyi tanımlı olduğunu göster

k dönüşümünü tanımlayalım. f, homomorfizma ise $\forall a \in R$

için $f(a) \in S$ dir. O halde

$k: R/_{Çekf} \to S$ dönüşümünü $\forall a+Çekf \in R/_{Çekf}$ için

3p

$k(a+Çek f) = f(a)$ ile tanımlayabiliriz

k'nın iyi tanımlılığı için

$\forall a+Çekf, b+Çekf \in R/_{Çekf}$ için $a+Çekf = b+Çekf$ ols

2p

$\Rightarrow a-b \in Çekf$

$\Rightarrow f(a-b) = 0_S$

$\Rightarrow f(a)-f(b) = 0_S$

5p

$\Rightarrow f(a)=f(b)$

$\Rightarrow k(a+Çekf) = k(b+Çekf)$ olduğundan k iyi tanımlıdır

3) a) $R/_I$'nın değişmeli old. göstermek için

$\forall a+I, b+I \in R/_I$ için $(a+I)(b+I) = (b+I)(a+I)$

olduğunu göstermeliyiz

10p

$ab-ba \in I \Rightarrow ab+I = ba+I$

$\Rightarrow (a+I)(b+I) = (b+I)(a+I)$ olup $R/_I$

değişmelidir

b) A ve B, R'nin iki ideali olsun.

$J = \{r \in R \mid \forall b \in B$ için $rb \in A\}$, R'nin ideali olur m

$J \neq \emptyset$: A ve B ideal old. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, 0 \in B$ için $r0 = 0 \in A$ old. $r \in J$ ol

$J \neq \emptyset$.

$J \subseteq R$: J'nin tanımından açık

$\forall r_1, r_2 \in J$ için $\forall b \in B$ için $r_1 b \in A$ ve $r_2 b \in A$ dır. A, R'nin id

idealin ilk koşulu $\Rightarrow r_1 b - r_2 b \in A$

+13 $\Rightarrow (r_1 - r_2) b \in A \xRightarrow{J'\text{nin tanımı}} r_1 - r_2 \in J$.

4p

(**) $\forall r \in R$ ve $\forall r_1 \in J$ için $r r_1 \in J$ ve $r_1 r \in J$ olduğunu göstermeliyiz

$r_1 \in J \Rightarrow \forall b \in B$ için $r_1 b \in A$ olur A, R'nin ideali old. $\forall r \in R$ için

$r(r_1 b) \in A \overset{H2}{\Rightarrow} (r r_1) b \in A \overset{J'\text{nin tanımı}}{\Longrightarrow} r r_1 \in J$ 3p

ve yine A, R'nin ideali ise $\forall r \in R$ için $(r_1 b) r \in A$

$\overset{H2}{\Longrightarrow} r_1(br) \in A \overset{R \text{ değişmeli}}{\Longrightarrow} r_1(rb) \in A \overset{H2}{\Longrightarrow} (r_1 r) b \in A \overset{J'\text{nin tanımı}}{\Longrightarrow} r_1 r \in J$ 3p

O halde J, R'nin bir idealidir

4) a) $C \neq \emptyset$: $0 \in \mathbb{Z}[i]$, $0.(5-i) = 0 \in C$ olup $C \neq \emptyset$ 1p

$C \subseteq \mathbb{Z}[i]$: $c \in \mathbb{Z}[i]$, $\underset{\in \mathbb{Z}[i]}{c.(5-i)} \in \mathbb{Z}[i]$ olduğu açıktır 1p

$\forall x,y \in C$ için $\left.\begin{array}{l} x = c_1.(5-i) \\ y = c_2\ (5-i) \end{array}\right\} c_1, c_2 \in \mathbb{Z}[i] \Rightarrow x - y = \underbrace{(c_1 - c_2)}_{\in \mathbb{Z}[i]}.(5-i) \in C$ 3p

$\forall x,y \in C$ için $xy = c_1(5-i)c_2.(5-i)$; $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}[i]$

$= \underbrace{(c_1(5-i)c_2)}_{\in \mathbb{Z}[i]}(5-i) \in C$ olup 5p

C, $\mathbb{Z}[i]$'nin bir alt halkasıdır

b) F/H'nin cisim old göstermek için keyfi bir $0_{F/H} = H \neq x + H \in F/H$ alalım ve $x+H$'nin terslenebilir olduğunu gösterelim

$x + H \neq H \Rightarrow x \notin H$

$\Rightarrow x$, Fde birimsel

$\Rightarrow xy = 1_F$ ve $yx = 1_F$ os $y \in F$ var 10p

$\left.\begin{array}{l} (x+H)(y+H) = xy + H = 1_F + H \\ (y+H)(x+H) = yx + H = 1_F + H \end{array}\right\}$ old. $x + H \in F/H$ terslenebilir

O halde F/H cisimdir.

5) a) $K / \text{Çek}\,\lambda$ Tamlık bölgesi olur mu?

K birimli ve değişmeli ise $K/\text{Çek}\,\lambda$ birimli ve değişmelidir

2p

O halde $K/\text{Çek}\,\lambda$ ~~nın~~ sıfır bölensizliğine bakalım

$a+\text{Çek}\,\lambda \neq \text{Çek}\,\lambda$ ve $(a+\text{Çek}\,\lambda)(b+\text{Çek}\,\lambda) = \text{Çek}\,\lambda$

$\Rightarrow a \notin \text{Çek}\,\lambda \Rightarrow \lambda(a) \neq 0_L$

olsun. $ab+\text{Çek}\,\lambda = \text{Çek}\,\lambda$

$\Rightarrow ab \in \text{Çek}\,\lambda$

8p

Çek λ tanımı

$\Rightarrow \lambda(ab) = 0_L$

λ homomorfizma

$\Rightarrow \lambda(a)\,\lambda(b) = 0_L$ $\quad \lambda(a)\in L,\ \lambda(b)\in L$, L sıfır bölensiz $\lambda(a)\neq 0_L$

L sıfır bölensiz $\in L$ $\in L$

$\Rightarrow \lambda(b) = 0_L$

$\Rightarrow b \in \text{Çek}\,\lambda$

$\Rightarrow b+\text{Çek}\,\lambda = \text{Çek}\,\lambda = 0_{K/\text{Çek}\,\lambda}$ olduğundan $K/\text{Çek}\,\lambda$ sıfır bölensizdir Yani Tamlık bölgesidir

b) M bir tamlık bölgesi $0 \neq x, y \in M$ olsun.

Keyfi bir $0 \neq a \in (x)(y)$ alalım.

$\Rightarrow a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ o.ş. $x_i \in (x)$ ve $y_i \in (y)$ vardır

2p

M birimli ve değişmeli old. $(x) = Mx$ ve $(y) = My$ yazılabilir

2p

$x_i = m_i x$ ve $y_i = m_i' y$ o.ş. $m_i, m_i' \in M$ vardır

$a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (m_i x)(m_i' y)$

6p

$= (m_1 x)(m_1' y) + (m_2 x)(m_2' y) + \dots + (m_n x)(m_n' y)$

M, T.B değişmeli

$= (m_1 m_1')(xy) + (m_2 m_2')(xy) + \dots + (m_n m_n')(xy)$

$= (m_1 m_1' + m_2 m_2' + \dots + m_n m_n')(xy) \in M(xy) = (xy)$

old. $(x)(y) \subseteq (xy)$ bulunur